

$$L(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} p \ln p dx$$

Def 2.6. 3.4

LaTable.

P_{row}	F	P	μ	σ^2	$\mathcal{L}$
Geom(p) Geom(p)	$1 - q^{x+1}$	—	$\frac{1-p}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$-\ln p$
$U(a, b)$ $H = \ln(b-a)$	$0, x < a$ $\frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]$ $1, x > b$	$\frac{1}{b-a}, x \in [a, b]$ $0, \text{otherwise}$	$\frac{a+b}{2}$ med = $\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{2}$
Exp(λ) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $H(x) = 1 - \ln \lambda$	$1 - e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{1}{\lambda}$ med = $\frac{\ln 2}{\lambda}$ mod = 0	$\frac{1}{\lambda^2}$	0
$N(a, \sigma^2)$ $H = \ln(\sigma \sqrt{2\pi e})$	ϕ	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a med = mod = a	σ^2	3
Pois(λ) $H = \lambda [1 - \ln \lambda] +$ $\lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \ln k!}{k!}$	$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$		λ	λ	$\frac{1}{\lambda} + 3$ $(\ln \lambda) \frac{1}{\lambda}$
Bi(n, p) $H = \frac{1}{2} \log_2(2npq) + O(\frac{1}{n})$	$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$		np	$np(1-p)$	$\frac{1 - 6pq}{4npq}$

1.

Вер. модель — матем. модель
реального процесса/явления, содержащего
эл-ты случайности.

1. Вероятности
Бернулли, С.В.

Условия адекватности модели:

1. Независимости исхода
2. воспроизводимости (матр.) условий
3. устойчивости частот $(\frac{n(A)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P)$

Задача Бернулли:

С какой вер-ю точка вып. хорды
образует боковые стороны и основание
 Δ , вписанного в нее?

а).



точка хорды хорды-
вершины Δ .

$$\Omega = [0, 2\pi] - \text{дуги}$$

$$P = \frac{1}{3}$$

б).



точка как середины
хорды

$$\Omega = \text{круг}$$

$$P = \frac{1}{4}$$

в) окруж. и диаметр, хорда $\perp$ ей и упорн. через Γ окруж.



$$P = \frac{1}{2}$$

$$\Omega = \text{диск}$$

Ответ — $\forall$ число $\alpha \in [0, 1]$.

Вер-е уп-то — тройка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$,

где Ω — ω -образное (элемент. исходе).

$\mathcal{A}$ — σ -алгебра событий Ω ; $\mathcal{A}$ — σ -алгебра событий.

$$- \Omega \in \mathcal{A}$$

$$- \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$$

$$- A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$$

P — вероятностная мера:

σ -упорядоченная мера: $P: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$1) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (\text{норм.})$$

$$2) P(\Omega) = 1 \quad (\text{нормализованность})$$

$$3) \sigma\text{-аддитивность. } A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$$

$$\Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

$\exists$ дана $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

def: Случ. велич. называется действ. ф-ция
элементов. события $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая
измеримостью: $\xi^{-1}(B) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}$, напрямую

— Борелевского. $\mathcal{B}$ — Борелевская σ -алг.
мин σ -алг. всех ф-х Борелевского типа.

распред. с. в.: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), P(\xi \in B)$.

ф-я распр.: $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$.

— $0 \leq F_\xi(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

— $F_\xi(x)$ неубывает (монотонно)

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$.

— $F_\xi(x)$ непр. слева.

Виды ф.р.:

1. Дискретная — имеет скачки не
более, чем счётно
2. Плотная — непрерывная — И т.д.!

$f_\xi(x) \geq 0: F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(x) dx$

плотная распр.

3. Смешанная — непрер., поиск-то имеет
скачки поиск-то непрер.

2. Математическое ожидание

Мат. ожидание: $E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega)$

$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x) \xrightarrow{\text{замени переменную}} \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega).$

1. Дискр. случай: $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(\xi = x_i)$ (ряд сходимости)

2. Непр. случай: $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx$

Случайный блуждающий! (нпр. — $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$)

Если $E\xi$ не существует! $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$ и.д.

Медиана:

q-квантиль (квантили — значения q из $[0,1]$ такие, что $P(\xi \leq x_q) \geq q$ и $P(\xi \geq x_q) \geq 1-q$)

число x_q : $P(\xi \leq x_q) \geq q$ $F_{\xi}(x_q + 0) \geq q$
 $P(\xi \geq x_q) \geq 1-q$ $F_{\xi}(x_q - 0) \leq q$

Если ξ — непрерывный, то это равенство $F_{\xi}(x_q) = q$.

Медиана: Квантиль порядка $1/2$: $\text{med } \xi = X_{1/2}$

Всп. случай $F_{\xi}(\text{med } \xi) = \frac{1}{2}$

Медиана всегда $\exists$, но не всегда $!$:

$$\xi = \begin{cases} 1, & P = 1/2 \\ 0, & P = 1/2 \end{cases} \quad E\xi = \frac{1}{2}, \quad \text{med } \xi = x \quad \forall x \in [0, 1]$$

Мода с.в.: а) Дискр. $\text{mod } \xi = \{x_i : (P(\xi=x_i) \geq P(\xi=x_j) \quad \forall j \in N, j \neq i)\}$

б) Абс-хвост: $\text{mod } \xi = \{x : f_{\xi}(x) \geq f_{\xi}(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}\}$
(если $f_{\xi}(x)$ - абс. хвост. ф-я)
 $\leftarrow$ м-то макс. ξ

Мода всегда определена; "Наивное безопасное злов."
Мода не всегда $!$: непрерывное р-е.

Модуль разброса **Разброс с.в. 3**

а) Дисперсия: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = \min_a (E(\xi - a)^2)$
 $B\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$; $D(a\xi) = a^2 D\xi$

б) $\sqrt{D\xi}$ - standard deviation (станд. откл.)
связана с разбросом ξ .

в) $E|\xi - \text{med } \xi|$ - (среднее отклонение от медианы,
связано)

2) $E|\xi - E\xi|$ — L_1 (интерференс) мерата
6,2: χ^2 модул — хурт ахавч. сб-ла, но үетэйгээр
нэ зур.

3) $\text{med}|\xi - \text{med}\xi|$ — MAD, median absolute deviation
работает даже когда $\neq$ монотон.

е) Интерквартильный размах $[x_{1/4}, x_{3/4}]$
 $L = x_{3/4} - x_{1/4}$: ахавч дисперси.

4. Зависимость $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

def: Сов. $A, B \in \mathcal{A}$ независимы, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. [стохастическая нез-ть]

def: $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ независимы в совокупности:

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$

Из конечной нез-ти не следует нез-ть в сов-ти.

def: С. величина ξ и η независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(R)$
 $P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$.

def Ковариация: $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta$

COV, COCH. 4.

Виды сходимости 5

$$= E\xi\eta - E\xi E\eta$$

- Линейна по каждому аргументу.

- Симметрична.

- Не зависит от сдвига.

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$$

$$\text{Если } \xi \text{ и } \eta \text{ нез.} \Rightarrow \text{cov}(\xi, \eta) = 0$$

обратно, в общем, не верно!

def Если корр. коэффициент: $\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq 1$$

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \xi = a\eta + b$$

Виды сходимости:

1. Путь к пределу (weak convergence): $\xi_1, \dots, \xi_n$ - случайные величины
 $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi) = 1$ т.е. $P(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1$

2. По вероятности. $\xi_1, \dots, \xi_n$ - е.в., опред. на одном б.п.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. В среднем квадрату $n \gg 0$: $E|\xi_n - \xi|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

4) Стандарт эк-ты: $P_n \Rightarrow P$, если $\forall$ непрерыв. функ. $\varphi(x)$ имеет место: $\int \varphi(x) dP_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \varphi(x) dP$

5) По расщеплению: $F_{n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x) \quad \forall x, \text{ кр. в } x$

Worm ~~being~~ halophore

no reproduction

слабая

по расф.

besednem

5 У.П.Т., екологична

U.T.H.

th (Центр. предельная): $\exists \xi_1, \xi_2, \dots \leftarrow$ независимые
однородно распр. случай. величины (копейки / iid) $\exists \mathbb{E} \xi_i = a; D \xi_i = \sigma^2$
тогда: $\mathbb{P} \left(\frac{\sum \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} < x \right) \Rightarrow \Phi(x)$ при $n \rightarrow \infty$
где $\Phi(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$

we $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$

Оценка качества сходности

Улс-то Бурху-Эцгээхэ:

$$J\mu_3 = E|\xi_i - a|^3; \text{ Тогда: } \left| P\left(\frac{\sum \xi_i - na}{\sqrt{na}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq$$

CK-16 CK-14: $\eta(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{C_0 \mu_3}{\delta^3 \sqrt{n}}$, $0.4 \leq C_0 \leq 0.7003$.

Т.о для Н.Б.-Э. требуется $\exists \mu_3$.

Однако ЦПТ сур-ва вышесказанного $\exists$ мат. ожидания.

Если $\exists$ только $E|\xi_i - E\xi_i|^2$, эк-ва эк-ти с кон-уродо медленнее.

$\exists E|\xi_i - E\xi_i|^{3+\varepsilon}$ — эк-то не увеличится.

$\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ — незав. случай. величины с

конечными мат. ожид. a_i и дисперсиями b_i^2

$$\exists A_n = \sum_{i=1}^n a_i, B_n^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2, F_n = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - A_n}{B_n} < x\right).$$

Условие Лунгеберга:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x-a_i| > \varepsilon B_n} |x-a_i|^2 dF_i(x) \right) = 0.$$

ЦПТ (Лунгеберг — Феллер): при выполнении

Усл. Лунг. и леммы Колмогорова мат. ожид. $b_i^2 \neq 0$.

т.о.:
$$\int |F_n(x) - P(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq n} P(|\xi_i - a_i| > \varepsilon B_n) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

← условие равномерной сходимости

т.н. (Лемма Колмогорова): $\exists E|\xi - E\xi|^3 = M^3, \frac{M^3}{B_n^3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, то

сур-ва ЦПТ: $F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P(x)$ (в усл. ЦПТ Лунгеберга).

6 ЗБЧ.

Задача Демидова Чисел

$\exists$ есть бесконечное множество. Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — независимые
на одном в.п. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\exists \mathbb{E}\xi_i = \mu \quad \forall i \in \mathbb{N}$.

$$\exists S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i, n \in \mathbb{N}$$

(ЗБЧ в ф. Колмогорова)

Тогда: $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$

Скорость Сходимости

$$Y_n = |S_n - \mu|$$

$\mu(n)$ — скорость сходимости (порядок убывающей ошибки).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_n}{\mu(n)} = C : 0 \neq C < \infty$$

Из Ц.Т.Т.: наилучшим $\mu(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sqrt{n} |S_n - \mu| < \varepsilon) &= \mathbb{P}(-\varepsilon < \sqrt{n}(S_n - \mu) < \varepsilon) = \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma} < \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1 \end{aligned}$$

Центральная предельная теорема.

Распр. Пуассона, th. 7

Характер. (хар. ф-я) 8

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \text{распр. Пуассона}$$

если X — с. в., принимающая неотриц. значения

$$EX = DX = \lambda$$

th: $\exists X_1, \dots, X_n, \dots$ — коп. $X_i \sim B(1, p)$;
 $n \cdot p = \lambda$; $p \leq \frac{1}{4}$

$$\text{Если } k-1 \leq \frac{\lambda}{4}, \text{ то } P(\sum_{i=1}^n X_i = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + o(1)}$$

$$\text{иначе } \frac{\lambda k}{n} + 2 \frac{(1-k)k}{n} \ln \frac{4}{3} - \frac{2\lambda^2}{3n} \leq o(1) \leq \frac{\lambda k}{n} + \frac{(1-k)k}{2n}$$

Пуассоновское распр. — предельная суммарная бинар.

def: Схема Бернулли (нечет. нечет. коп.)

X_{11}
 X_{21}, X_{22}
 $\dots$
 $X_{n1}, \dots, X_{n,n}$

$$X_{ni} \sim \begin{cases} 1 & \text{с вер. } p_i \\ 0 & \text{с вер. } q_i \end{cases}$$

th (Пуассона). Это схематический и.

$$n \rightarrow \infty, p_n \rightarrow 0, np_n \rightarrow \lambda > 0$$

Тогда: $\forall k=0,1,2,\dots \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Обобщение th Пуассона: для схематического

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq n} p_{n,j} = 0, \sum_{i=1}^n p_{n,i} \rightarrow \lambda$$

Тогда: $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$

Устойчивые пары

def: Пары распр. $G_1(x)$ и $G_2(x)$ с соответствующими функциями $g(t)$ называются

устойчивыми, если $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$
 $[\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}]$

$\exists a > 0, b \in \mathbb{R}$:

$$g(a_1 t) \cdot g(a_2 t) = g(at) \cdot e^{i\theta}$$

$$\left[(G' * G'')(x) = G_1(ax + \theta), \text{ где } \right. \\ \left. G'(x) = G_1(a_1 x + \theta_1); G''(x) = G_1(a_2 x + \theta_2) \right]$$

th (Леву): $\exists \xi_1, \dots, \xi_n$ - корев.

Ф-я распр. $G_1(x)$ может быть инф-
денной для $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - a_n}{b_n}$ при некоторых
 $a_n \in \mathbb{R}, b_n > 0 \iff G_1(x)$ - устойчива.

def: ф-я распр. $G_1(x)$ с хар. ф.
 $g(x)$ назыв. безгранично делимой,
если $\forall n \geq 1 \exists$ х.ф. $g_n(x)$:

$$g(x) = (g_n(x))^n, \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

th (Хуккина): $\exists \{X_{n,j}\}_{j \geq 1}, n=1,2,\dots$

- послед. серия незав. в каждой серии
случ. величин.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq j \leq n_n} P(|X_{n,j}| > \varepsilon) = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$.

Тогда $F(x)$ может быть удовлетворена для
суммы вида $X_{n1} + \dots + X_{nn}$, $\iff F(x)$ безгр. делима
при $n \rightarrow \infty$

Информация

def: $\exists A$ - событие, $P(A) > 0$.

Информационная событие, кодиф. $P(A)$,
измер. величина $I(A) = -\log P(A)$

Основа $\log > 1$

def: $\exists A, B$ события, $P(A) > 0, P(B) > 0$

Информационная событие сод. в B об A

$$I(A|B) = \log_a \frac{P(A|B)}{P(A)}, \quad a > 1$$

Св-ва информации:

- 1) чем меньше $P(A)$, тем больше $I(A)$
- 2) если A и B - незав., то $I(A|B) = 0$ $I(A)$
- 3) если A и B - незав., то $I(AB) = I(A) + I(B)$

1-ый.

Энтропия 8.

Рассм. энsembles E : совокуп. одних из исходов $A_1 \dots A_n$ с вероятностями $p_1 \dots p_n$. $I(A_i)$ — информация, соед. в A_i .

$\exists Q(E)$ — сум. величина, принимающая значения $I(A_i)$ с вер-ми p_i .

$$H(E) = EQ(E) = - \sum_{k=1}^n p_k \ln p_k$$

Энтропия энsembles с конечным числом исходов $H(E) = - \sum_{k=1}^n p_k \cdot \ln p_k$

Лемма Энтропии:

1) $H(E)$ всегда ≥ 0 , $H(E) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists i: p_i = 1$

2) $\exists E_0$ — энsemble с равнов. исх-ми: $p_i = \frac{1}{n} \forall i = \overline{1, n}$. Тогда $H(E_0) \geq H(E)$, $\forall$ энsembles E с n исходами

3) $H(E)$ не зависит от A_i , а зависит только от p_i , $i = \overline{1, n}$

4) Пусть E — энтропия, с n исхо-
 дами E_1 — энтропия, полученная из E
 объединением A_i и A_j (с $n-1$ исходами),
 а E_2 — энтропия с исходами A_i и A_j и
 вер-ми $\frac{p_i}{p_i+p_j}$ и $\frac{p_j}{p_i+p_j}$ соотв. Тогда:

$$H(E) = H(E_1) + (p_i + p_j) H(E_2)$$

5) $H(E)$ непрерывна по $p_1, \dots, p_n$.

Лемма (Рассела): если функция

$H(p_1, \dots, p_n)$ удовле-т. свойствам 1—5, то
 она обязана иметь вид $H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$

Опред.: Пусть ξ — адс. непрерыв. случайная величина с плотностью $f(x)$; $H(\xi) = -\mathbb{E} \log p(\xi)$ — дифференциальная энтропия; здесь $\log = \ln$.

Свойства некоторых распр.:

Пусть ξ — адс. непрерыв. случайная величина.

1. $\xi \sim \mathcal{U}[-a, a], a > 0 \Rightarrow H(\xi) \geq H(\eta)$,
(равномерное распр. на $[-a, a]$)

$\forall \eta: P(|\eta| \leq a) = 1$

2. $\xi \sim P(S) \Rightarrow H(\xi) \geq H(\eta), \forall \eta: P(\eta \geq 0) = 1$,
(экспоненциальное распр. с параметром S) $\mathbb{E} \eta = \frac{1}{S}$

3. $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2) \Rightarrow H(\xi) \geq H(\eta), \forall \eta: \mathbb{E} \eta = a$,
(нормальное распр.) $D \eta = \sigma^2$

Т.о.: 1. *Polkaneptae* Jacq. handonee heoufegeriethe
e payu beex ha otyzke

2. *Polkaneptae* — hand. heoufeg. efedu beex
ha heoufeg. heoufeg.

3. *Polkaneptae* — hand. heoufeg. efedu
beex ha R.

legentlich

и все

ду

Опред. Сигнальным процессом называется
Семейство сигн. величин $X(\bar{u}, t), t \in T \subseteq \mathbb{R}$,
определенных на одном вер. пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Опред. Траекторная сигнатурная процесс —
 $X(t\omega_0, t)$ при фикс. ω_0

Частной сигнатур. процесс ($T = \mathbb{N}$) —
послед. сигнатур. величин.

$(T \subseteq \mathbb{Z}) \xrightarrow{X(\bar{u}, t), t \in T}$ Сигн. процесс с дискретным временем
(T -интеграл, Кохен-Ланг или Десмондский) $\xrightarrow{X(\bar{u}, t), t \in T}$ Сигнатурный
процесс с непрерывным временем.

мног $\mathcal{S}$ — множество всех траекторий сигн. процесса.
 Σ — борелевская σ -алгебра на $\mathcal{S}$

Опред. $X: \Omega \rightarrow \mathcal{S}$; X назыв. сигнатурным
элементом, если оно измеримо ($\forall \beta \in \Sigma X^{-1}(\beta) \in \mathcal{A}$)

Рассеянный опред.: Распределение сугг. проц. X_0 :
мера P_x на (S, Σ) такая, что $P_x(B) = P(\bar{\omega}: X(\bar{\omega}) \in B)$,
 $\forall B \in \Sigma$

Опред.: Сугг. процесс $X(t)$ назыв. процессом с независимыми приращениями, если:
 $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n, t_i \in T, i = \overline{1, n}$

сугг. величины $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$
независимы в совокупности.

Опред.: Сугг. процесс $X(t)$ назыв. однородным,
если $\forall t, s, h: t, t+h, s, s+h \in T, h > 0$
сл. велич. $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$
распределены одинаково.

Опред.: сугг. процесс $X(t)$ - Пуассоновский, если:

- 1) $X(0) = 0$ почти наверное
- 2) $X(t)$ - имеет независимые приращения
- 3) $X(t)$ - однородный
- 4) при $h \rightarrow 0+0 \exists \delta > 0$:

$$P(X(h) = 0) = 1 - \delta h + o(h)$$

$$P(X(h) = 1) = \delta h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 2) = o(h)$$

Пуасс. процесс 1.1

Пуассоновский процесс: с.у. процесс $X(t)$ $\{t \in T\}$.

Назв. пуассоновским с.у.:

- 1) $X(0) = 0$ почти наверное.
- 2) $X(t)$ имеет л.у. прыжки, т.е. $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n, t_i \in T$
сущ. велич. $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ —

независимые в сов-ти.

- 3) $X(t)$ — однородный, т.е. $\forall t, s, h: t, t+h, s, s+h \in T$,
 $h > 0$. с.у. величина $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ независимы.

- 4) при $h \rightarrow 0+0 \exists \delta > 0$:

$$\begin{cases} P(X(h) = 0) = 1 - \delta h + o(h) \\ P(X(h) = 1) = \delta h + o(h) \\ P(X(h) \geq 2) = o(h) \end{cases}$$

δ — число событий, воз-ца интенсивности

пуассоновского процесса.

$$E X(t) = D(X(t)) = \delta t.$$

S — число шагов, воз-ся интервалов

Для Пуасс. процесса, $EX(t) = D(X(t)) = St$

Упоряд. св-ва Пуассоновского
процесса

упр. св-ва
Пуасс.-проц-са 12

Пусть $\tau_1, \dots, \tau_n$ — упорядоченные моменты.
(времена шагов) Пуассоновского процесса.

Распределение ~~время~~ времени между шагами
 $\tau_j - \tau_{j-1}$ — независимое, с упр.-м. S .

Обладает св-вом отсутствия памяти.

Зафиксируем на временной оси отрезок
 $[a, b]$; $\tau_1, \dots, \tau_n$ — времена шагов Пуасс.
процесса (упорядоченные), попавшие в $[a, b]$.

Теорема: Распределение $(\tau_1, \dots, \tau_n | X(b) - X(a) = n)$
совпадает с распред. Варисау. рода, порожденного по
выборке объема n из равном. распред. на $[a, b]$

Теорема: пусть $X(t)$ — марковский процесс,
 $\Delta > 0$. Тогда: $\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} < x\right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{по } x} \Phi(x)$, и, кроме

$$\Delta(\Delta t) = \sup_x \left| \mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \Delta t}{\sqrt{\Delta t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0}{\sqrt{\Delta t}} \quad \leftarrow \text{конст. из}$$

Леммы Бернулли —
 Феллера.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — незав. одинаково расп. случайн. величины, ξ_i — ад. бер.

N — целая неотриц. случайн. величина.

ξ_i, N ($i \in \mathbb{N}$) определены на одном бер. пр-ве.

См. сумму. 13

Опред.: $S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ — Суммарная сумма
 $(S_N = \sum_{i=1}^{N(\omega)} \xi_i(\omega); \sum_{i=1}^0 \xi_i = 0)$.

Свойства сумм. сумм:

1) $F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F^{*n}(x)$, где $p_n = P(N=n)$,
 $F^{*n}(x)$ — n -кратная свертка функции распр. F_{ξ_i} ,
 $F^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

2) Если $p_0 > 0$, то F_{S_N} не является ад. бер.,
 даже если у ξ_i есть плотность.

3) Если у ξ_i ~~не~~ есть пл-ть и $p_0 = 0$,
 то плотность S_N имеет вид:

$p_{S_N}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot g^{*k}(x)$
 $\underbrace{\quad}_{g^{*k}} \quad k$ — кратная свертка пл-ти ξ_i

4) Характер. ф-я S_N : $f_{S_N}(t) = \psi(f(t))$, где $\psi(s)$ - характерист. ф-я N ; $f(t)$ - характерист. ф-я ξ_i .

$$5) \mathbb{E} S_N' = \mathbb{E} N \cdot \mathbb{E} \xi_1'$$

$$\mathbb{D} S_N = \mathbb{D} N \cdot (\mathbb{E} \xi_1')^2 + \mathbb{E} N \cdot \mathbb{D} \xi_1'$$

Если $N \sim \text{Pois}(\lambda)$, то S_N — уассоновская
случ. сумма.

Сб-ла уасс. случай. суммы:

$$f_{S_N}(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

1) $f_{S_N}(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$ — хар. ф-я S_N .

$\Rightarrow$ распр. S_N безгранично делимо.

$$2) \mathbb{E} S_N = \lambda \mathbb{E} \xi_1'; \quad \mathbb{D} S_N = \lambda (\mathbb{E} \xi_1'^2) + \lambda \mathbb{E} \xi_1'^2 = \lambda \mathbb{E} \xi_1'^2$$

Теорема: пусть $\xi_1, \dots, \xi_N$ — нез. од. распр. с.в., $\mathbb{E} \xi_1^2 < \infty$,

$a = \mathbb{E} \xi_1$, $\sigma^2 = \mathbb{D} \xi_1$; $N \sim \text{Pois}(\lambda)$. Тогда:

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_N - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x) \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Если еще } \mathbb{E} \xi_1^3 < \infty \text{ то } \sup_x \left| P\left(\frac{S_N - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 \cdot \mathbb{E} |\xi_1|^3}{(\sigma^2 + a^2)^{3/2}}, \quad C_0 - \text{уз. кр-ла Бейна-Джесса.}$$

1), где

Геометр. случайная сумма

Теор. Сл. Σ , 14.
Т. Реньи.

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — нез. одраспр. с.в., $N \sim \text{Геом}(p)$

$$EN = \frac{1-p}{p}; DN = \frac{1-p}{p^2}; \chi_N(s) = \frac{p}{1-(1-p)s}; P(N=k) = p(1-p)^k, k=0,1,2,\dots$$

$S_N = \xi_1 + \dots + \xi_N$ — геометр. случайная сумма

Теорема (Реньи): пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н.с.в.,

$$\xi_i \geq 0 \quad \forall i \quad E\xi_i > 0; E\xi_i = a < \infty, a > 0$$

$$G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$M \sim \text{Геом}(p), S_M$ — геом. сумм.

сумм. сумма. Тогда: 1) $P(\frac{p}{a} S_M < x) \xrightarrow{p \rightarrow 0} G(x)$,

2) если $E\xi_i^2 = b^2$:

$$\sup_x |P(\frac{p}{a} S_M < x) - G(x)| \leq \frac{pb^2}{(1-p)a^2}$$

~~$$ES_M = EN \cdot E\xi_1 = \frac{1-p}{p} E\xi_1$$~~

$$ES_M = EN \cdot E\xi_1 = \frac{1-p}{p} E\xi_1$$

$$DS_M = \frac{1-p}{p^2} \cdot (E\xi_1)^2 + \frac{1-p}{p} \cdot D\xi_1$$

Связь между Пуассоновскими и Геометр.
Случ. суммами.

Связь Пуасс. и Геом. сл. сумм. 14.

- 1) Если M - геом. ободу. Пуассоновская сл. величина (теорема). Тогда S_M - Пуассоновская сл. сумма.
- 2) Если $M \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow M$ - ободу. Пуассоновская сл. величина.

Теорема: любая геом. сл. сумма есть Пуассоновская сл. сумма: $M, \xi_1, \xi_2, \dots$ — независ. $S_M = \sum_{k=1}^M \xi_k$, $M \sim \text{Geom}(p)$, то $S_M \stackrel{d}{=} S_N$, где $N \sim \text{Pois}(\ln \frac{1}{p})$, $S_N \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$, где $Y_j \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^L \xi_k$; L имеет логарифм. распр. $P(L=k) = \frac{1}{k} p^k (1-p)^{k-1}$.

Следствие: пусть S_N — Пуассоновская сл. сумма.

Если $g(t) = \frac{1-e^{-st}}{1-e^{-s}}$ — Хар. ф-ция, где $\xi_i \sim f(t)$, $N \sim \text{Pois}(s)$, то S_N — геом. сл. сумма $S_M \stackrel{d}{=} S_N$, $S_M \stackrel{d}{=} Y_1 + \dots + Y_N$, $Y_i \sim g(t)$, $M \sim \text{Geom}(e^{-s})$.

Следствие: В геом. сл. сумма имеет безгр. предел. распределение

$$\text{Ecmu } S_n, N_n \Rightarrow Y, \frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U, \sqrt{0}.$$

$$S_n, N_n \Rightarrow Z : f_2(t) = \pm h^u(t), \text{ we}$$

$h(t)$ - Xap. of year Y .

Афанасьев Т. П. 15
дир. с.с. - З. С. С. С.

Афанасьев теорема Пуассона для с.с. С.С.С.

Теорема:

Пусть $\{X_{n,p}\}$ - семейство независимых с.с.в.

$X_{n,p} \sim \{0, 1, \dots, N_p\}$. N_p - семейство независимых с.с.в. значений $\forall p, N_p, X_{1,p}, \dots, X_{N_p,p}$ — независимые с.с.в. $S_p = \sum_{i=1}^{N_p} X_{i,p}$.

Пусть $\exists N: p N_p \Rightarrow N$; тогда $S_p \Rightarrow S'$,
где S' - дискр. с.в., $p(S'=k) = \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} z^k e^{-z} dP(N < z)$

$$P(S=k) = E \frac{e^{-N} \cdot N^k}{k!}$$

Опрег.: пусть $F(x, y)$ определена на $\mathbb{R} \times \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n$ - на $\mathcal{Y}$ определ. σ -алгебра Σ .
 пусть $\forall$ фикс. $y \in \mathcal{Y}$ $F(x, y)$ - функция распр.
 $\forall$ фикс. $x \in \mathbb{R}$: $\bar{F}(x, y)$ - измерима на $(\mathcal{Y}, \Sigma)$.
 пусть Q - вероятностная мера на $(\mathcal{Y}, \Sigma)$.

Тогда $H(x) = \int_{\mathcal{Y}} \bar{F}(x, y) dQ(y)$ - смесь распр.
 $\bar{F}(x, y)$ по y относительно $Q(y)$.

$\bar{F}(x, y)$ - смешиваемое; $Q(y)$ - смешивающее.

Если $Y(y) \equiv y$, $y \in \mathcal{Y}$, ал. велич. на $(\mathcal{Y}, \Sigma, Q)$, то ф.р. $H(x) = \mathbb{E} \bar{F}(x, Y)$.

Если $f(x, y)$ - плотность распр., соотв. ф. распр. $\bar{F}(x, y)$,

$$\begin{aligned} \text{то } h(x) &= \int_{\mathcal{Y}} \cancel{f(x, y) Q(y)} dy = \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) dQ(y) \\ h(x) &= \mathbb{E} f(x, Y). \end{aligned}$$

Если сл. вектор Y имеет дискр. распр. и принимает значения $y_1, y_2, \dots$ с вер-ми $p_1, p_2, \dots$, то дискретная

$$H(x) = \mathbb{E} F(x, Y) = \sum_{j \geq 1} p_j \underbrace{F(x, y_j)}_{\substack{\text{комбинаторная} \\ \text{сумма} \\ \text{веса} \\ \text{комбинаторов}}}, x \in \mathbb{R}$$

Сдвиг/масштабная

случ. $Y \in \mathbb{R}^2$. $Y = (u, v)$, $u > 0, v \in \mathbb{R}$:

$F(x, y) = F\left(\frac{x-v}{u}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ тогда $Y = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
 пооч. поим. и

$$H(x) = \int_y F\left(\frac{x-v}{u}\right) Q(du, dv), x \in \mathbb{R}$$

Сдвиг/масштабная сумм

Втермнар сл. вел.: $H(x) = \mathbb{E} F\left(\frac{x-v}{u}\right)$.

$H(x)$ соотв. распр. с. в. $x \cdot u + v$, где $x, (u, v)$ — независимы.

Дискр.: $H(x) = \sum p_i F\left(\frac{x-a_i}{b_i}\right)$;

Идентифицируемость:

Опред: $\exists H_i(x) = \mathbb{E} F(x, i)$. $F(x, y)$ —
 $\forall x$ — измерима по y , $\forall y$ — ф. распр.; $\mathcal{Q}$ —
семейство сл. величин. $W = \{H_q(x), q \in \mathcal{Q}\}$ —

Семейство смесей.

W назыв. идентифицируемым, если

$$\text{из } \mathbb{E} F(x, q_1) = \mathbb{E} F(x, q_2) \quad \forall x, q_1, q_2 \in \mathcal{Q}$$

$$\implies q_1 \stackrel{d}{=} q_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Пример неидейн.: Семейство} \\ \text{равном. смесей!} \end{array} \right.$$

Еще один пример смесей: пусть задана —
еся совокупность из K субпопуляций.

$F_i(x)$ — вер-то того, что знач. признака $\leq x$, при
условии, что индивид в i -й подпопуляции; p_i —
вер-то выбора индивида из i -йой субпопул.

Тогда $H(x) = \sum_{i=1}^K p_i F_i(x) \leftarrow$ вер-то того, что зн-е
признака $\leq x$.

Опред.: Семейство $\mathcal{F}$ -н распр. назыв.

аддитивно-замкнутым, если $\forall y_1 > 0, y_2 > 0$.

~~$F(x, y_1)$~~ $F_1 = F(x, y_1); F_2 = F(x, y_2)$

$$(F_1 * F_2)(x) = F(x, y_1 + y_2), \text{ где}$$

$$(F_1 * F_2)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y) dF_2(y).$$

Утв.: если $\{F(x, y), y > 0\}$ - адд. замкн.,

$$Q = \{q: P(q > 0) = 1\} \implies \text{сем-во сущест}$$

така $\{FF(x, q), q \in Q\}$ идентифицируемо.

Утв.: сем-во $\{F(x, q), q > 0, F(0) = 0\}$, $G(y) = F(e^y)$,
преобр. Фурье - Стилеса $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} dG(y)$ не оор. в L^1 ,
иначе,

$Q = \{q: P(q > 0) = 1\}$. Тогда сем-во сущест

$\{FF(x, q), q \in Q\}$ - идентифицируемо

Узв.: Q — множество всех цел. чисел.

$F(x)$ — ф-я распр.: хар. ф-ция $f(t) \neq 0 \forall t$

Тогда $\{E F(x-q), q \in Q\}$ — идентифицируемо.

Здесь $E F(x-q)$ — единая смесь с.в. $X+q$, где q и X — незав-мые $X \sim F(x)$.

Замеч.: для узв. смр-го $\neq$ смешивающей ф-я.

Узв.: конечная свмр-масштабная смесь нормальных законов идентифицируема.

Класс Масштабных смесей Нормальных законов:

- 1) Глорин. р-е $\sim \frac{e^{-x^2}}{x}; x \rightarrow \infty$
- 2) Р-е Лапласа $\sim e^{-2x}; x \rightarrow \infty$
- 3) Р-е Вейбулла $\sim \frac{1}{x^2}; x \rightarrow \infty$
- 4) Р-е Коши $\sim \frac{1}{x}$

Скорость
убывания
плотности.

Обобщение Пуассоновск. 2-го X. 17. 17. 17
 процесса, давая его кас.
 Пуассоновский процесс.

Опред.: Процесс $X(t)$ - Пуассоновский, если:

- 1) $X(0) = 0$ почти наверное
- 2) $X(t)$ - имеет незав. приращения
- 3) $X(t)$ - однородный
- 4) при $h > 0, h \rightarrow 0+0$

$$P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 2) = o(h)$$

λ - интенсивность Пуасс. процесса

$N_\lambda(t)$ - стандартный Пуассоновский процесс
 ($\lambda = 1$).

Опред.: пусть $\lambda(t)$ - непрерыв. выпукл. ф-я: $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du$
 тогда $N^*(t) = N_1(\Lambda(t))$ - неод. кр. Пуасс. процесс

$$P(N^*(0) = 0) = 1, \quad P(N^*(t) = k) = \frac{e^{-\Lambda(t)} (\Lambda(t))^k}{k!}$$

$$\mathbb{E}N^*(t) = \Lambda(t).$$

$$\frac{\mathbb{E}N^*(t+h) - \mathbb{E}N^*(t)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} S(t)$$

инкремент. теорема.
процесс.

$S(t)$ —

инкрементная
интенсивность.

$\Lambda(t)$ — накопительная интенсивность.

Пусть $\Lambda(t)$ — сумм. процесс, удовл. след. у сл.:

1) $\Lambda(0) = 0$ почти наверное

2) $P(\Lambda(t) < \infty) = 1 \quad \forall t$

3) траектории пр-са $\Lambda(t)$ непрерывны и не уб. и не уб.

сигнала.

Опред: $N(t) = N_1(\Lambda(t))$, где $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$ независ. $\forall t$
называется двумерным стохастическим Пуассоновским процессом (процессом Жокса).

Если $\Lambda(t)$ имеет предель. $\Lambda(t) = \int_0^t S(\tau) d\tau$, где
 $S(\tau)$ — процесс с неогр. и неуб. управлением, то
 $S(t)$ — инкрементная стохастическая интенсивность
процесса Жокса, а $\Lambda(t)$ — накопительная стохаст.
интенс.

$$\mathbb{E}N(t) = \mathbb{E}N(t) | \Lambda(t) = \mathbb{E}\Lambda(t)$$

$$D N(t) = \mathbb{E}\Lambda(t) + D\Lambda(t).$$

Ободу. процесс Кокса Ободу. Кокса 18.
 УПТ и Зб4 для ободу. ир.-сса Кокса

$\Lambda(t)$ - управивляющий процесс, $\Lambda(0) = 0$ ^{по условию}

у.м.: $\forall t \ P(\Lambda(t) < \infty) = 1$; также $\Lambda(t)$ непрерывен и
 непрерывен. $N_1(t)$ - стандарт. процесс;
 $N_1(t)$ и $\Lambda(t)$ независимы $\forall t \Rightarrow N(t) = N_1(\Lambda(t))$ - процесс Кокса

Р-м. $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ - нез. од. разпр. с.в. вел.,
 $N(t)$ - процесс Кокса, $N(t), \xi_1, \xi_2, \dots$ - независимы
 $\forall t \geq 0$. $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i$.

Опред.: $S(t)$ наз. ободу. процессом Кокса

если $\Lambda(t) = \alpha t \Rightarrow S(t)$ - обод. Пуасс. процесс

$$\alpha = E\xi_1, \sigma^2 = D\xi_1 \quad (\text{здесь и далее})$$

Теорема (УПТ для ободу. проц. Кокса):

если $\Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$, $E\xi_1 = 0$, $S(t)$ - обод. проц. Кокса.

$d(t) > 0$ - непрерыв. возр. неогранич. ф-ция

Тогда для $\exists$ с.в. $Z: \frac{S(t)}{\sigma \sqrt{d(t)}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Z$
 необходимо и достаточно $\exists$ с.в. $u \geq 0$:

$$1) P(Z < x) = \int_0^{\infty} P\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(u < y).$$

$$2) \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} u \quad (\text{успешное стартует. перемещение}).$$

Следствие: $Z \sim N(0, 1) \Leftrightarrow \frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$

Пусть $G_{\alpha, 0}(x)$ - ф.р. ермитаевского закона; хар. ф-я:

$$g_{\alpha, 0}(t) = \exp\left\{-|t|^{\alpha} \cdot \exp\left[-i \frac{\theta_{\alpha} \pi}{2} \operatorname{sgn} t\right]\right\}, |\theta| < \theta_{\alpha}$$

$$0 < \alpha \leq 2$$

$$\theta_{\alpha} = \min\left(1, \frac{2}{\alpha} - 1\right).$$

Теорема (Критерий с.в. одн. парамет. О.П.К. к ермитаевскому закону):

$\frac{\Lambda(t)}{d(t)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$, $E\xi_1 = 0$, $S(t)$ - одод. (фун. колес),
 $d(t) > 0$ неогр. выпр. неогр. ф-ция, тогда

$$P\left(\frac{S(t)}{\sigma \sqrt{d(t)}} < x\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} G_{\alpha, 0}(x) \Leftrightarrow P\left(\frac{\Lambda(t)}{d(t)} < x\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} G_{\frac{\alpha}{2}, 1}(x)$$

$$G_{\alpha, 0}(x) = \int_0^{\infty} P\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{\frac{\alpha}{2}, 1}(y).$$

Пусть $\Lambda(u) = \sum_{i=1}^u z_i$, z_i - нез. од. разпр. сл. вел.

(т.е. Λ - нормальное распределение),

~~$S(u) = \sum_{i=1}^u x_i$~~ $S(u) = \sum_{i=0}^{\Lambda(u)}$, $x_i, x_2, \dots$ - коэф.

Теорема: ~~$\frac{S(u)}{u} \xrightarrow{P} \mu$~~ $\frac{S(u)}{u} \xrightarrow{P} \mu$, пусть $E x_i = 0$.

$P\left(\frac{S(u)}{u} < x\right) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} G_{2,0}(x)$ при некотором

выборе $\sigma_u \Leftrightarrow \forall K > 0 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(z_1 > x)}{P(z_1 > Kx)} = K^{1/2}$

Теорема (354 для Одн. Прог. Кокса):

$\Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty$; $\# \xi_i = a \neq 0$, $S(t)$ - одн. пр. Кокса.

$\frac{S(t)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} z \Leftrightarrow \exists u: \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow u$ (z, u - сл. вел.).

При этом $z \stackrel{d}{=} au$.

Острове́рнутость и Острове́рнутость 18
Смесь нормальных законов.

$$H(x) = \mathbb{E} \Phi\left(\frac{x}{y}\right), \quad h(x) = \mathbb{E} \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Def: $\mathcal{L}(Z) = \mathbb{E} \left[\frac{Z - \mathbb{E}Z}{\sqrt{\mathbb{D}Z}} \right]^4, \quad \mathbb{E}Z^4 < \infty$ —

Коэф. Эйнса (хар-ка острове́рнутости).

Если $Z \sim N(0,1)$, то $\mathcal{L}(Z) = 3$.

Умнож. $f(Z) = \mathcal{L}(Z) - 3$, тогда

Коэф. Эйнса $N(0,1)$ равен нулю.

Если $\mathcal{L}(Z) < 3$, то Z имеет менее тяжёлые
хвосты, чем у нормального; если $\mathcal{L}(Z) > 3$ —
более тяжёлые хвосты, чем у $N(0,1)$ и более
острая вершина бимод. $f(Z)$.

У матм. смеси Коф.
Законов Коэф. Эйнса > 3 .

(Вывод из след. утв.) Важно

Пусть X, Y - нез. с.л., $X \sim N(0, 1)$, $P(Y > 0) = 1$,
 ~~$E X^4, E Y^4 < \infty$~~ $E X^4, E Y^4 < \infty$, $E X = 0$.
 ~~X, Y - нез. с.л.~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{R}(XY) \geq \mathcal{R}(X)$, применим лемму Джозефа.
 $\Leftrightarrow P(Y = \text{const}) = 1$. $(Z = X\sqrt{U})$. Если $E U^2 < \infty$,

то Y непрерыв. функ-я, то в кон-ке функ-я
 непрерывна X в-е, можно брать коэф-т, Фейермана.

Пусть $P_Z(x) = E \frac{1}{\sqrt{u}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} \varphi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(U < y)$.

Уб: $\forall x > 0 \quad P(Z > x) \geq 1 - P(\sqrt{2\pi} x p_Z(0))$, здесь
 $Z = \xi \sqrt{u}$, $\xi \sim N(0, 1)$, $u > 0$ произвольное.

Следствие: если для непрерыв. закона $E u^{-1/2} = 1$,

то $\underbrace{P(Z > x)}_{x \rightarrow \infty \text{ монот.}} \geq \underbrace{1 - \varphi(x)}_{x \rightarrow \infty \text{ монот. функ-я}}$

$$p_Z(0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dP(u < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E u^{-1/2}.$$

Пр. задача 4. 20

Услов. доп. смеем от симуляционного расф.
(ираная задача)

Пусть $Z = XY$ (для машин. смеем), $P(Y \geq 0) = 1$.

$X \sim F_X(x)$, $Y \sim G_Y(x)$, X и Y - незав.
↑ симуляцие. ↑ симуляционн.

$$Z_1 = \frac{x_1}{y_1}; Z_2 = \frac{x_2}{y_2}. \quad \rho(x_1, x_2) = \sup_x |F_{x_1}(x) - F_{x_2}(x)|$$

$$\rho(y_1, y_2) = \sup_x |G_{y_1}(x) - G_{y_2}(x)|.$$

У-б: $\rho\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) \leq P(X_1 < 0)P(Y_1 = 0) + P(X_2 < 0)P(Y_2 = 0) +$
 $+ \rho(x_1, x_2)P(X_1 > 0) + P(X_2 \leq 0) \cdot |P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)| +$
 $+ \rho(x_1, x_2) \cdot I(x), \text{ где } I(x) = \begin{cases} P(X_2 > 0), & x > 0 \\ P(X_2 < 0), & x < 0 \end{cases}$

Сл-е 1: пусть $P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2) \cdot \min_{i=1,2} \max(P(x_i > 0), P(x_i < 0)).$$

Сл-е 2: В условии Сл-я 1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2)$$

Сл-е 3: Выводимся Сл-е 1 (см 2),
и $\exists i \in \{1, 2\}: P(X_i > 0) = P(X_i < 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p\left(\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right) \leq p(x_1, x_2) + \frac{1}{2} p(x_1, x_2)$$

Пусть $\boxed{P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = 0}$, $p\left(\frac{1}{y_1}, \frac{1}{y_2}\right) = p(x_1, x_2)$.

Сл-е 4: (в выв. Сл-е 1, (*)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x_1 y_1, x_2 y_2) \leq p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2) \cdot \min_{i=1,2} \max \left(P(X_i > 0), P(X_i < 0) \right)$$

Сл-е 5: (в выв. Сл-е 1, (*)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x_1 y_1, x_2 y_2) \leq p(x_1, x_2) + p(y_1, y_2)$$

Сл-е 6: (в выв. Сл-е 3, (*)) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p(x_1 y_1, x_2 y_2) \leq p(x_1, x_2) + \frac{1}{2} p(y_1, y_2)$$

$EP\left(\frac{x}{\sqrt{u}}\right) \sim x\sqrt{u}$, $x \sim N(0, 1)$, $P(u > 0) = 1$.

$Z_i = \frac{x_i}{\sqrt{u_i}}$, $i=1, 2$, $x_1, x_2 \sim N(0, 1)$, $P(u_i > 0) = 1$, $i=1, 2$.

Пусть $Z_1 \sim P(x)$, $Z_2 \sim P\left(\frac{x}{y}\right)$

Лем. 1: Пусть $E \max\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right) < \infty \Rightarrow p(z_1, z_2) \leq 0,242 |E \max\left(\frac{y}{x}, \frac{1}{y}\right) - 1|$.

Лем. 2: если $E \bar{y}^2 < \infty \Rightarrow p(z_1, z_2) \leq |E \bar{y}^2 - 1|$

Лем. 3: если $E y^4 < \infty \Rightarrow p(z_1, z_2) \leq 0,648 \cdot \left(E \left| \frac{z_2 - E z_2}{\sqrt{D z_2}} \right| - 3 \right)$

Одп. Зад. 4. 21

Услов. х. ф. имеет
отн. сменяющегося параметра (обратная задача)

$$Z_i = X_i \sqrt{u_i}, i=1, 2; \quad \mathbb{E} \Phi\left(\frac{X_i}{\sqrt{u_i}}\right) \sim Z_i$$

$$f_i(t) = \mathbb{E} e^{itZ_i} = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} e^{itX_i \sqrt{u_i}} \mid u_i \right) = \mathbb{E} e^{-\frac{t^2}{2} u_i}$$

х. ф. Z_i

$$\psi_i(s) = \mathbb{E} e^{-su_i}, \quad s > 0, \quad Z \geq 0 \text{ имеет левый}$$

прегр. левая с. в. $Z_i \Rightarrow f_i(t) = \chi_i\left(\frac{t^2}{2}\right)$

$$|f_1(t) - f_2(t)| = \left| \chi_1\left(\frac{t^2}{2}\right) - \chi_2\left(\frac{t^2}{2}\right) \right|$$

Ф-ра обр. лев. ~~Ф-ра обр. лев.~~ $P(U_j < x) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \leq \sqrt{2t}} \frac{(-1)^n (2t)^{n/2}}{n!} f_j^{(n)}(\sqrt{2t} \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |P(U_1 < x) - P(U_2 < x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n \leq \sqrt{2t}} \frac{(2t)^{n/2}}{n!} |f_1^{(n)}(\sqrt{2t} \cdot x) - f_2^{(n)}(\sqrt{2t} \cdot x)|$$

Блейн Метрика Леба: для ф. f, g х. ф.

$F, G \Rightarrow$

$$L(F, G) = \inf \{ h: F(x-h) - h \leq G(x) \leq F(x+h) + h, \forall x \in \mathbb{R} \}$$

Однородная $F_{p,\sigma}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(\sigma x)$.

$F_{p,\sigma}$ соотв. незав. с. в. $X, U_{p,\sigma}: X \sim N(0,1)$,

$$U_{p,\sigma} = \begin{cases} 1, & p \\ \frac{1}{\sigma}, & 1-p \end{cases}$$

Улб 1: $\forall \varepsilon > 0, p \in (0,1), \sigma \in (0,1) \cup L(F_p, F_{p,\sigma}) < \varepsilon$.

$$\Rightarrow L(\frac{1}{\sigma}, U_{p,\sigma}) \leq C\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } C = (\sqrt{e}(1+\sqrt{2\pi}))^{1/2}.$$

напрям. сущ. в.

Улб 2: $\forall p, q \in (0,1), \sigma \in (0,1) \cup L(F_{p,\sigma}, F_{q,\sigma}) < \varepsilon$

$$\Rightarrow L(U_{p,\sigma}, U_{q,\sigma}) \leq C\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } C = (\sqrt{e}(1+\sqrt{2\pi}))^{1/2}$$

Улб 3: $\forall p \in (0,1), \sigma_1, \sigma_2 \in (0,1) \cup L(F_{p,\sigma_1}, F_{p,\sigma_2}) < \varepsilon$

$$\Rightarrow L(U_{p,\sigma_1}, U_{p,\sigma_2}) \leq C\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } C = (\sqrt{e}(1+\sqrt{2\pi}))^{1/2}.$$

$G_{p,a}(x) = p\Phi(x) + (1-p)\Phi(x-a)$, соотв. с. в. $X + U_{p,a}$. $U_{p,a} = \begin{cases} 0, & p \\ a, & 1-p \end{cases}$
 $X \sim N(0,1)$

Улб 4: $\forall p \in (0,1), |a| < 1 \cup L(\Phi, G_{p,a}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(0, U_{p,a}) \leq C\sqrt{\varepsilon}, \text{ где } C - \text{конст. из улб 1-3}$$

Улб 5: $\forall p, q \in (0,1), |a| < 1 \cup L(G_{p,a}, G_{q,a}) < \varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow L(U_{p,a}, U_{q,a}) \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

Улб 6: $\exists p \in (0,1), a_1, a_2 \in (-1,1) \cup L(G_{p,a_1}, G_{p,a_2}) < \varepsilon \Rightarrow L(U_{p,a_1}, U_{p,a_2}) \leq C\sqrt{\varepsilon}$

Моделирование расфеденений
иностранной фран. индекс смесями
защитов

Модель Бруша - Уолуза: ифранцузские
 цены опис. с пом-ю диффузионного проц.
две сост.: лесингмант и сигнал
 (внереволюционный проц.).

Внимательность: Коэф. ифранцузской части
 (дисперсия ифранцузская).

Уел. цена динамика: в j -й момент времени
 τ_j цена = P_j . $P(t) = P_j, \tau_j \leq t \leq \tau_{j+1}$.
 $I_N(t)$ - пом-ю $I_N(t)$, $I_N(t)$ с уел. динамикой
 в лесингмант момент времени τ_j .

$\frac{P_j}{P_{j-1}}$ — ифранцузская лас величина

$$\frac{P(t)}{P(0)} = \prod_{j=1}^{N(t)} \frac{P_j}{P_{j-1}} \quad - \text{модель процесса}$$

$$\ln P(t) - \ln P(0) = \sum_{j=1}^{N(t)} (\log p_j - \log p_{j-1})$$

Сум. сумма: $S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$ Сделаем предп.

зав. независим, нулевым матож. и одит. распр.

X_j . $\Lambda(t)$ - интенсив. Отн. $\Lambda(t)$ аperiodическим

$\exists \Lambda(t) = \lambda t$, $N(t)$ - процесс Кокса, т.е. $N(t) = N_1(\Lambda(t))$
(планди боклет. нуле. процесс)

$$\overline{P}(t) = \max_{\tau \in (0, t)} P(\tau), \quad \underline{P}(t) = \min_{\tau \in (0, t)} P(\tau).$$

Теоф: ~~незав.~~ $\exists \Lambda(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty$ (интенс. топов. возрост.)
(о леме обратного)

$$EX_j = 0; \quad DX_j = \sigma^2 \text{ и } X_j \text{ зав. } j=1, 2, \dots$$

Тогда: сред. усл. эволюциониров.

$$\begin{aligned} 1) P\left(\frac{\ln P(t) - \ln P(0)}{\sigma \sqrt{\lambda t}} < x\right) &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} F(x) = \mathbb{E} \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \\ 2) P\left(\frac{\ln \overline{P}(t) - \ln P(0)}{\sigma \sqrt{\lambda t}} < x\right) &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \overline{F}(x) = 2\mathbb{E} \Phi\left(\frac{\max(0, x)}{\sqrt{n}}\right) - 1 \\ 3) P\left(\frac{\ln \underline{P}(t) - \ln P(0)}{\sigma \sqrt{\lambda t}} < x\right) &\xrightarrow{s \rightarrow \infty} \underline{F}(x) = 2\left(1 - \mathbb{E} \Phi\left(-\frac{\min(0, x)}{\sqrt{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Если n - монотонно в.р.-н, то $\lambda \Rightarrow \frac{\Lambda(t)}{\lambda t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$.